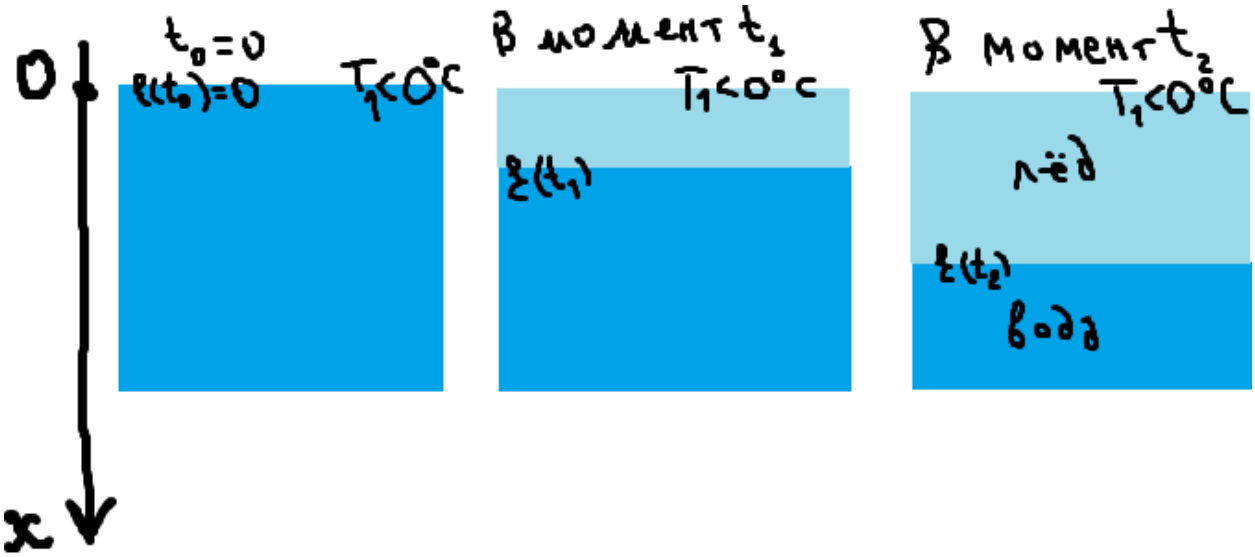
28. Как ставится задача Стефана?
29. Какой физический смысл имеет задача Стефана?
30. В чем состоит метод подобия?

Задача Стефана – это задача, где граница подвижна, т.е. двигается в зависимости от временем.

Обычно она рассматривается на примере задачи о замерзании.
Рассмотрим озеро зимой.
В начальный момент времени озеро целиком состоит из воды, и постепенно промерзает в силу того, что при x=0 поддерживается температура T1<0, и граница ξ(t)



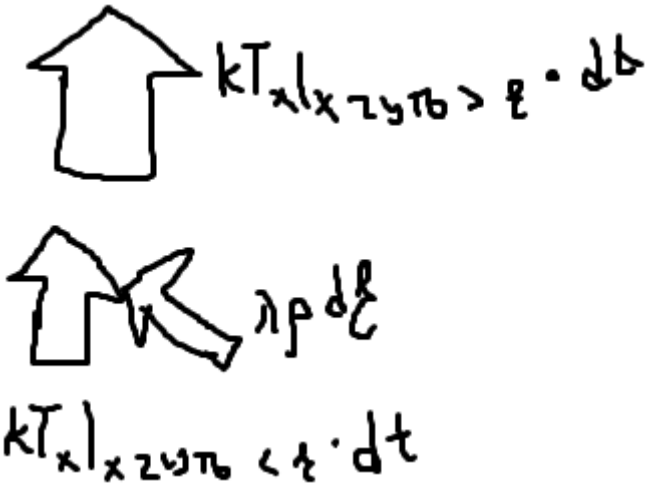
ГУ и НУ (температуру Боголюбов обозначает как u):
ξ (t=0) = 0 (в начале граница сред была при x=0)
u(t=0) = T (вначале вся вода была при температуре кристаллизации (T=273,15 K))
u (x=0) = T1<T – на границе поддерживается температура <T, что и вызывает постепенное промерзание озера.

И в воде, и во льду действует уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & 0<x<\xi, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \xi < x < \infty, \end{cases}$$

(Коэфы температуропроводности a1 и a2 воды и льда могут быть, естественно, разными).
Но они действуют везде, кроме как раз подвижной границы. Там их полномочия

Потому что на границе замерзания происходит нечто другое.
Давайте рассуждать: замёрз отрезок dξ воды, в нём масса воды ρdξ, выделилось γρdξ (где γ=330 Дж/кг, известная вам из школы величина).
Куда это всё пошло? По озеру идут потоки тепла. Вспомним, что $P=kT_x$ (мощность прямо пропорциональна разности температур, k – коэф теплопроводности).
Поток энергии идёт вертикально вверх, но при прохождении граница к нему добавляется теплота кристаллизации:



Что и позволяет записать уравнение на границе

$$k_1 \cdot \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\xi} - k_2 \cdot \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi} = \lambda\rho\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}.$$

Итого получили

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi; \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \xi < x < +\infty; \\ u_1 = T_1, \ x = 0; \\ u_2 = T, \ t = 0; \\ u_1 = u_2 = 0, \ x = \xi(t), \ \xi(0) = 0; \\ k_1 \cdot \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\xi} - k_2 \cdot \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi} = \lambda\rho \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Как решать?

Всё-таки в большинстве точек верно уравнение теплопроводности. А если вспомнить ММФ, то там многократно вылезала функция ошибок. Так давайте искать решения в виде функций ошибок:

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

$$\text{где} \quad \Phi(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^w e^{-z^2} \mathrm{d}z \ - \ \text{функция ошибок.}$$

Получим, что вся та система выполнится, если нам удастся выполнить

$$A_1 = T, \quad A_2 + B_2 = T,$$

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0, \quad A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0$$

А это успех, ведь это даже не дифуры. Правда, в последних двух уравнениях всё-таки фигурирует ξ(t). И эти уравнения должны выполнять для любых t. А давайте потребуем, чтобы ξ(t)/$\sqrt{t}$ будет константой (у Боголюбова это α)! Тогда аргумент функции ошибок Φ будет константа, и данное уравнение сможет выполняться при любых t.

Далее у Боголюбова следует занудный счёт всех констант, мы его опустим.

30. В чем состоит метод подобия?

Метод подобия позволяет перейти от задач функции многих переменных к функции одной переменной. А одномерные диффуры – это всегда проще, чем многомерные.

Давайте решим задачу о промерзании второй раз именно этим методом. Сначала потренируемся на уравнении теплопроводности.

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{286}$$

Заметим, что уравнение (286) не изменяется при преобразовании переменных:

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t. \tag{287}$$

Это означает, что решение задачи зависит от аргумента $\frac{x}{\sqrt{t}}$, то есть

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{288}$$

(Аналогия с калибровкой φ и **A** на электроде самая что ни на есть прямая). Замечу, что z никакое не комплексное, это новая действительная переменная.

Теперь надо просто пересчитать частные производные через обычную производную (единственную) f(z). Например, так пересчитывается u_t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{x}{4t^{3/2}}.$$

Аналогично пересчитывается u_{xx}, получается

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4t} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2},$$

И в итоге уравнение теплопроводности сводится к одномерному дифуру

$$a^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = -2z \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}.$$

Который уже легко решается, получается ф-ция ошибок.

Теперь давайте пересчитаем ГУ задачи теплопроводности. Напомню, что $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$. Когда x=0, то и z=0. Когда t=0, то z=бесконечности. Это и порождает ГУ $f_1(0) = T_1, \quad f_2(\infty) = T;$. Теперь разберёмся с ξ(t). А она вообще выродится до константы. (честно говоря, я не придумал простого объяснения, почему).

Итого наша задача вырождается до одномерной:

$$
\begin{cases}
a_1^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}z^2} = -2z \dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}z}, \quad 0 < z < \dfrac{\alpha}{2}; \\
a_2^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 f_2}{\mathrm{d}z^2} = -2z \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}z}, \quad \dfrac{\alpha}{2} < z < +\infty; \\
f_1(0) = T_1, \quad f_2(\infty) = T; \\
f_1\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = f_2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 0; \\
k_1 f_1'\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - k_2 f_2'\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \lambda \rho \alpha.
\end{cases}
$$

Метод подобия активно применяется в нелинейных задачах, которые будут позднее.